Exercice 1 — 30 min — 3 pt

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^4}$

1. On se propose dans cette question de déterminer des réels a, b, c et d tels que pour tout $x\in]-1;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{d}{(x+1)^4}$
   - a) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4.f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).f(x)$
   - b) En déduire que $d=1$ et $a=0$.
   - c) Vérifier que pour tout $x\in]-1;+\infty[$, on a : $\dfrac{1-c}{(x+1)^3}=\dfrac{b}{(x+1)^2}$.
   - d) En déduire les valeurs de b et c.
2. Calculer alors $I=\int_0^1 f(x)dx$

Exercice 2 — 30 min — 4 pt

On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$ dont le tableau de variation est ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

1. Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :
   - a) Trouver un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+$.
   - b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{f(x)-1}$
2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;1]$.
   - a) Montrer que h réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   - b) Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   - a) Dresser le tableau de variation de g.
   - b) Construire $\mathscr{C}$.
4. Soit $I=\int_0^1 g(x)dx$ et $J=\int_0^1 x.g'(x)dx$.
   - a) Donner une interprétation graphique de I.
   - b) Montrer que $1\le I\le 2$.
   - c) Calculer $I+J$.
   - d) En déduire que $0\le J\le 1$

www.takiacademy.com